



College voor Examens

WISKUNDE B VWO

Syllabus centraal examen 2012

Beschikbaar gesteld door de Universiteit Leiden en Stichting Studiebegeleiding Leiden (SSL).

Voor alle eindexamens, zie www.afceexamens.nl. Voor de perfecte voorbereiding op je eindexamen, zie ook www.examencursus.com.

November 2010

Verantwoording:

© 2010 College voor Examens vwo, havo, vmbo, Utrecht.

Alle rechten voorbehouden. Alles uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enige andere manier zonder voorafgaande toestemming van de uitgever.

Beschikbaar gesteld door de Universiteit Leiden en Stichting Studiebegeleiding Leiden (SSL).
Voor alle eindexamens, zie www.alleexamens.nl. Voor de perfecte voorbereiding op je eindexamen, zie ook www.examencursus.com.

Inhoud

Voorwoord	3
1. Het centraal examen vwo	4
1.1 Hulpmiddelen	4
1.2 Significantie	4
1.3 Algebraïsche vaardigheden	4
1.4 Verdeling examinering CE/SE.....	4
2. Specificatie van de globale eindtermen voor het CE	5
Domein A: Vaardigheden	5
Domein Bg: Functies en grafieken	6
Domein Cg: Discrete analyse.....	6
Domein Bb: Differentiaal- en integraalrekening	7
Domein Db: Goniometrische functies	8
Domein Gb: Voortgezette meetkunde.....	8
3. Algebra: specifieke en algemene vaardigheden	10
Bijlage 1: Examenprogramma Wiskunde B vwo	17
Bijlage 2: Algebra in het vwo; het onderscheid tussen A, B en C	19
Bijlage 3: Lijst van formules en verwijzingen naar definities/stellingen die in het examen wordt opgenomen	22
Bijlage 4: Lijst van definities/stellingen behorend bij de verwijzingen in bijlage 3	23

Voorwoord

De minister heeft de examenprogramma's op hoofdlijnen vastgesteld. In het examenprogramma zijn de exameneenheden aangewezen waarover het centraal examen (CE) zich uitstrekt: het CE-deel van het examenprogramma. Het examenprogramma geldt tot nader orde.

Het College voor Examens (CvE - voorheen CEVO¹) geeft in een syllabus, die in beginsel jaarlijks verschijnt, een toelichting op het CE-deel van het examenprogramma. Behalve een beschrijving van de exameneisen voor een centraal examen kan de syllabus verdere informatie over het centraal examen bevatten, bijvoorbeeld over een of meer van de volgende onderwerpen: specificaties van examenstof, begrippenlijsten, bekend veronderstelde onderdelen van domeinen of exameneenheden die verplicht zijn op het schoolexamen, bekend veronderstelde voorkennis uit de onderbouw, bijzondere vormen van examinering (zoals computerexamens), voorbeeldopgaven, toelichting op de vraagstelling, toegestane hulpmiddelen.

Ten aanzien van de syllabus is nog het volgende op te merken. De functie ervan is een leraar in staat te stellen zich een goed beeld te vormen van wat in het centraal examen wel en niet gevraagd kan worden. Naar zijn aard is een syllabus dus niet een volledig gesloten en afgebakende beschrijving van alles wat op een examen zou kunnen voorkomen. Het is mogelijk, al zal dat maar in beperkte mate voorkomen, dat op een CE ook iets aan de orde komt dat niet met zo veel woorden in deze syllabus staat, maar dat naar het algemeen gevoelen in het verlengde daarvan ligt.

Een syllabus is zodoende een hulpmiddel voor degenen die anderen of zichzelf op een centraal examen voorbereiden. Een syllabus kan ook behulpzaam zijn voor de producenten van leermiddelen en voor nascholingsinstanties. De syllabus is *niet* van belang voor het schoolexamen. Daarvoor zijn door de SLO handreikingen geproduceerd die niet in deze uitgave zijn opgenomen.

Deze syllabus geldt voor het examenjaar 2012. Syllabi van eerdere jaren zijn niet meer geldig en kunnen van deze versie afwijken. Voor het examenjaar 2013 wordt een nieuwe syllabus vastgesteld. Het CvE publiceert uitsluitend digitale versies van de syllabi. Dit gebeurt via Examenblad.nl (www.examenblad.nl), de officiële website voor de examens in het voortgezet onderwijs. In de syllabi 2012 zijn de wijzigingen ten opzichte van de vorige syllabus voor het examenjaar 2011 duidelijk zichtbaar. Deze veranderingen zijn geel gemarkeerd. Er zijn diverse vakken waarbij de syllabus 2012 geen inhoudelijke veranderingen heeft ondergaan.

Een syllabus kan zo nodig ook tussentijds worden aangepast, bijvoorbeeld als een in de syllabus beschreven situatie feitelijk veranderd is. De aan een centraal examen voorafgaande Septembermededeling is dan het moment waarop dergelijke veranderingen bekendgemaakt worden. Kijkt u voor alle zekerheid jaarlijks in september op Examenblad.nl.

Het CvE stelt het aantal en de tijdsduur van de toetsen van het centraal examen vast en de wijze waarop het centraal examen wordt afgenomen. Deze vaststelling wordt gepubliceerd in het rooster voor de centrale examens en in de Septembermededeling.

Voor opmerkingen over syllabi houdt het CvE zich steeds aanbevolen. U kunt die zenden aan info@cve.nl of aan CvE, Postbus 315, 3500 AH Utrecht.

De voorzitter van het College voor Examens,
Drs. H.W. Laan

¹ Op 1 oktober 2009 is de CEVO (Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven) opgegaan in het CvE. De CEVO bestaat niet meer, maar besluiten van de CEVO, onder meer over de syllabi, blijven van kracht zolang deze niet herzien zijn door het CvE.

1. Het centraal examen vwo

1.1 Hulpmiddelen

Raadpleeg hiervoor het Examenblad, www.examenblad.nl.

In bijlage 3 van deze syllabus is een lijst opgenomen met formules en verwijzingen naar definities en stellingen die op bladzijde 2 van het examen zal worden afgedrukt.

1.2 Significantie

Er wordt van kandidaten bij wiskunde B niet verlangd dat zij kennis hebben van regels voor het aantal significante cijfers. Daarom zal bij vragen op het centraal examen worden aangegeven in welke nauwkeurigheid een antwoord dient te worden gegeven of er zal genoeg worden genomen met antwoorden in uiteenlopende aantallen decimalen.

1.3 Algebraïsche vaardigheden

Hoewel de grafische rekenmachine (GR) een krachtig hulpmiddel is, ook bij het oplossen van vergelijkingen, dient de kandidaat ook algebraïsche vaardigheden te beheersen. In hoofdstuk 3 is dit thema nader uitgewerkt.

1.4 Verdeling examinering CE/SE

Het centraal examen heeft betrekking op de subdomeinen A5, Bg1, Bg2, Cg1, Bb1, Bb2, Bb3, Db1, Gb1 en Gb2, in combinatie met de vaardigheden uit subdomeinen A1, A2 en A3.

Het examenprogramma bouwt voort op veronderstelde basiskennis die in de onderbouw van havo is verworven.

In de onderstaande tabel is weergegeven hoe de subdomeinen over het CE en SE verdeeld worden:

domein	subdomein	in CE	moet in SE	mag in SE
A Vaardigheden	A1: Informatievaardigheden	X	X	
	A2: Onderzoeksvaardigheden	X	X	
	A3: Technisch-instrumentele vaardigheden	X	X	
	A4: Oriëntatie op studie en beroep		X	
	A5: Algebraïsche vaardigheden	X	X	
Bg Functies en grafieken	Bg1: Standaardfuncties	X		X
	Bg2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden	X		X
Cg Discrete analyse	Cg1: Veranderingen	X		X
Bb Differentiaal- en integraalrekening	Bb1: Afgeleide functies	X	X	
	Bb2: Algebraïsche technieken	X	X	
	Bb3: Integraalrekening	X	X	
Db Goniometrische functies	Db1: Goniometrische functies	X	X	
Gb Voortgezette meetkunde	Gb1: Oriëntatie op bewijzen	X	X	
	Gb2: Constructie en bewijzen in de vlakke meetkunde	X	X	
F Keuze-onderwerpen			X	

2. Specificatie van de globale eindtermen voor het CE

In dit hoofdstuk worden de globale eindtermen uit het examenprogramma voor 2007 voor het Centraal Examen (CE) gespecificeerd. Een globale formulering van eindtermen van alle subdomeinen (het examenprogramma) staat in bijlage 1.

Domein A: Vaardigheden

Subdomein A1: Informatievaardigheden

1. De kandidaat kan, mede met behulp van ICT, informatie verwerven, selecteren, verwerken, beoordelen en presenteren.

Specificatie

De kandidaat kan:

- 1.1 artikelen of berichten uit (nieuws)media of vakliteratuur waarin wiskundige presentaties, redeneringen of berekeningen voorkomen, kritisch analyseren.
- 1.2 informatie verwerven en selecteren uit schriftelijke, mondelinge en audiovisuele bronnen, mede met behulp van ICT. Waar het een schriftelijk eindexamen betreft, beperkt deze eindterm zich tot het selecteren van informatie uit een gegeven context.
- 1.3 benodigde gegevens halen en interpreteren uit grafieken, tekeningen, simulaties, schema's, diagrammen en tabellen, mede met behulp van ICT.
- 1.4 gegevens weergeven in grafieken, tekeningen, schema's, diagrammen en tabellen, mede met behulp van ICT.
- 1.5 hoofd- en bijzaken onderscheiden.
- 1.6 feiten met bronnen verantwoorden.
- 1.7 informatie analyseren, schematiseren en structureren.
- 1.8 de betrouwbaarheid beoordelen van informatie en de waarde daarvan vaststellen voor het op te lossen probleem of te maken ontwerp.

Subdomein A2: Onderzoeksvaardigheden

2. De kandidaat kan een gegeven probleemsituatie inventariseren, vertalen in een wiskundig model, binnen dat model wiskundige oplostechnieken hanteren en de gevonden oplossingen betekenis geven in de context.

Specificatie

De kandidaat kan:

- 2.1 logische relaties tussen gegevens, beweringen en resultaten aanbrengen en beoordelen en relevante gegevens scheiden van minder relevante gegevens.
- 2.2 gegevens met elkaar en met de probleemstelling in verband brengen, op grond daarvan een passende aanpak kiezen en deze zo mogelijk opsplitsen in deeltaken.
- 2.3 in een tekst verstreekte gegevens doelmatig weergeven in een geschikte wiskundige representatie (model).
- 2.4 vaststellen of een gekozen model voldoet en, indien nodig, een bijstelling hiervan suggereren.
- 2.5 vaststellen of er aanvullende gegevens nodig zijn en zo ja, welke.
- 2.6 onderzoeken in hoeverre het model bijgesteld moet worden ten gevolge van wijzigingen in de gegevens.
- 2.7 een bij het model passende wiskundige oplossingsmethode correct uitvoeren.
- 2.8 resultaten betekenis geven in de context en binnen die context kritisch analyseren.
- 2.9 de nauwkeurigheid van de gegevens of werkwijzen betrekken bij de beoordeling van het eindresultaat.
- 2.10 reflecteren op de gemaakte keuzen voor representatie, werkwijze, oplossingsproces en resultaten en deze onder woorden brengen.

Subdomein A3: Technisch-instrumentele vaardigheden

3. De kandidaat kan bij raadplegen, verkennen en presenteren van wiskundige informatie en bij uitvoeren van wiskundige bewerkingen en redeneringen gebruik maken van toepassingen van ICT.

Subdomein A5: Algebraïsche vaardigheden

5. De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige en algebraïsche vaardigheden en formules, heeft daar inzicht in en kan de bewerkingen uitvoeren met, maar ook zonder, gebruik van ICT-middelen zoals de grafische rekenmachine.

Specificatie

De kaders voor dit subdomein worden geschetst in hoofdstuk 3.

Domein Bg: Functies en grafieken

Subdomein Bg1: Standaardfuncties

6. De kandidaat kan grafieken tekenen en herkennen van machtsfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies en van die verschillende typen functies de karakteristieke eigenschappen benoemen.

Specificatie

De kandidaat kan:

- 6.1 grafieken tekenen van machtsfuncties met rationale exponenten en daarbij de begrippen domein, bereik, stijgen, dalen, symmetrie en asymptotisch gedrag hanteren.
- 6.2 grafieken tekenen van exponentiële functies van het type $f(x) = a^x$ en hun inverse functies $f(x) = {}^a\log x$ en daarbij de begrippen domein, bereik, stijgen, dalen en asymptotisch gedrag hanteren.
- 6.3 grafieken tekenen van de goniometrische functies $f(x) = \sin x$ en $f(x) = \cos x$ en daarbij de begrippen radiaal, periode, amplitude, domein, bereik, stijgen, dalen en symmetrie hanteren.²

Subdomein Bg2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden

7. De kandidaat kan functievoorschriften opstellen, bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen en vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met behulp van numerieke, grafische en algebraïsche methoden.

Specificatie

De kandidaat kan:

- 7.1 een in de context beschreven samenhang vertalen in een functievoorschrift.
- 7.2 op grafieken transformaties uitvoeren als verschuiven en rekken en de samenhang met de bijbehorende verandering van het functievoorschrift beschrijven.
- 7.3 functies combineren (optellen, aftrekken, schakelen) en de samenhang met de bijbehorende grafieken beschrijven.
- 7.4 een tweedegraadspolynoom in één variabele ontbinden in lineaire factoren.
- 7.5 een algoritme gebruiken voor het oplossen van een tweedegraadsvergelijking.
- 7.6 vergelijkingen oplossen met numerieke, grafische of elementair-algebraïsche methoden.
- 7.7 de rekenregels voor machten en logaritmen (inclusief grondtalverandering) gebruiken.
- 7.8 gebruik maken van logaritmische schaalverdelingen.
- 7.9 ongelijkheden oplossen met de grafische methode.
- 7.10 het begrip absolute waarde hanteren.

Domein Cg: Discrete analyse

Subdomein Cg1: Veranderingen

8. De kandidaat kan het veranderingsgedrag van grafieken en functies relateren aan differentiequotiënten, toenamedigrammen, hellinggrafieken en contexten.

² $\sin x$ en $\cos x$ worden tot de standaardfuncties gerekend; $\tan x$ niet.

Specificatie

De kandidaat kan:

- 8.1 vaststellen op welke intervallen er sprake is van een constant, een stijgend of een dalend verloop van de grafiek van een functie.
- 8.2 vaststellen of een stijging/daling toenemend of afnemend is.
- 8.3 vaststellen of er minima en maxima zijn en uit een grafiek aflezen hoe groot die zijn.
- 8.4 veranderingen beschrijven met behulp van differenties, bijvoorbeeld Δx .
- 8.5 veranderingen beschrijven en vergelijken met behulp van differentiequotiënten.
- 8.6 differentiequotiënten berekenen als een functie gegeven is door een formule of grafiek.
- 8.7 differentiequotiënten interpreteren als maat voor gemiddelde verandering op een interval en als helling van een koorde.
- 8.8 bij afnemende stapgrootte differentiequotiënten interpreteren als benadering van de helling (steilheid) van de grafiek in een bepaald punt.
- 8.9 van een gegeven grafiek de bijbehorende hellinggrafiek beschrijven en met een computer of GR numeriek benaderen.
- 8.10 uit een gegeven hellinggrafiek het verloop van de oorspronkelijke grafiek afleiden.
- 8.11 relaties leggen tussen contexten, bijbehorende formules of functies en veranderingsgedrag.

Domein Bb: Differentiaal- en integraalrekening

Subdomein Bb1: Afgeleide functies

9. De kandidaat kan het differentiaalquotiënt en de eerste en tweede afgeleide gebruiken om een functie te onderzoeken en om een contextprobleem op te lossen.

Specificatie

De kandidaat kan:

- 9.1 de helling van een grafiek in een punt numeriek-grafisch benaderen als de functie gegeven is door een formule.
- 9.2 het differentiaalquotiënt gebruiken als maat voor de lokale verandering van een functie en als richtingscoëfficiënt van de raaklijn.
- 9.3 het differentiaalquotiënt gebruiken om een functie lokaal lineair te benaderen.
- 9.4 het verband aangeven tussen de afgeleide van een functie f en van een functie g waarvan de grafiek door verschuiven of rekken uit die van f is ontstaan.
- 9.5 de afgeleide functie gebruiken voor het bestuderen van stijging of daling van een functie.
- 9.6 de afgeleide gebruiken bij het vinden van extremen van een functie of het verifiëren van langs numeriek-grafische weg gevonden extremen.
- 9.7 de tweede afgeleide gebruiken om toe- of afname van stijging of daling te onderscheiden.
- 9.8 de tweede afgeleide gebruiken bij het vinden van buigpunten van een grafiek of het verifiëren van langs numeriek-grafische weg gevonden buigpunten.
- 9.9 de diverse notaties voor de afgeleide en de tweede afgeleide functie $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{dK}{dq}$, $\frac{ds}{dt}$, $f''(x)$ herkennen en gebruiken.
- 9.10 relaties leggen tussen begrippen in contexten, met name de begrippen snelheid en versnelling, de eerste en/of tweede afgeleide van een functie en de grafieken van de eerste en/of tweede afgeleide.
- 9.11 een optimaliseringsprobleem vertalen in een model waarbij een functie van één variabele optreedt en dit probleem vervolgens numeriek-grafisch of met behulp van de afgeleide van deze functie oplossen.

Subdomein Bb2: Algebraïsche technieken

10. De kandidaat kan afgeleide functies bepalen met behulp van regels voor het differentiëren en algebraïsche technieken hanteren.

Specificatie

De kandidaat kan:

- 10.1 algebraïsche uitdrukkingen omwerken.
- 10.2 de afgeleide bepalen van standaardfuncties.
- 10.3 bij het bepalen van de afgeleide van exponentiële en logaritmische functies het getal e en de natuurlijke logaritme gebruiken.

- 10.4 voor het bepalen van de afgeleide functie de som-, verschil-, product-, quotiënt- en/of kettingregel gebruiken.

Subdomein Bb3: Integraalrekening

11. De kandidaat kan in geschikte toepassingen een bepaalde integraal opstellen en exact berekenen, en met behulp van ict benaderen.

Specificatie

De kandidaat kan:

- 11.1 bij daarvoor geëigende toepassingen een bepaalde integraal opstellen.
11.2 met behulp van de grafische rekenmachine een Riemansom berekenen als benadering van een integraal
11.3 de notatie $\int_a^b f(t)dt$ herkennen en gebruiken.
11.4 een integraal exact berekenen in het geval de integrand
a. de gedaante $f(x) + c$, $f(x + c)$, $c \cdot f(x)$ of $f(c \cdot x)$ heeft, waarbij f een machtsfunctie, een exponentiële functie, of de functie sinus of cosinus is.
b. de som van twee of meer functies zoals bedoeld in a. is.
11.5 een integraal gebruiken bij de berekening van lengte (van een deel van een grafiek of parameterkromme), oppervlakte, inhoud, afgelegde weg en zwaartepunt.

Domein Db: Goniometrische functies

Subdomein Db1: Goniometrische functies

12. De kandidaat kan bij periodieke verschijnselen, met name trillingspatronen en harmonische bewegingen, formules opstellen, herleiden en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen en vergelijkingen oplossen.

Specificatie

De kandidaat kan:

- 12.1 de eenparige cirkelbeweging en de harmonische beweging in verband brengen met de functies sinus en cosinus.
12.2 gebruik maken van de begrippen amplitude, evenwichtstand, periode, frequentie en faseverschil bij het tekenen van een sinusoïde of het beschrijven van een periodiek verschijnsel.
12.3 bij een gegeven sinusoïde een passende formule opstellen.
12.4 vergelijkingen oplossen van het type $\sin a = \sin b$ en $\cos a = \cos b$ waarbij a en b lineaire functies van x zijn en hierbij de periodiciteit gebruiken voor het vinden van alle oplossingen.
12.5 de formules waarin $\sin(t + \pi)$, $\cos(t + \pi)$, $\sin(t + \pi/2)$ (of $\sin(\pi/2 - t)$), $\cos(t + \pi/2)$ (of $\cos(\pi/2 - t)$), $\sin(-t)$, $\cos(-t)$, $\sin(2t)$ en $\cos(2t)$ worden uitgedrukt in $\sin t$ en/of $\cos t$, gebruiken bij het herleiden van formules en het oplossen van vergelijkingen.
12.6 de formules $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ en $\frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$ gebruiken bij het herleiden van formules.
12.7 de formules voor $\sin(t \pm u)$, $\cos(t \pm u)$, $\sin t \pm \sin u$, $\cos t \pm \cos u$ gebruiken bij het verklaren van samengestelde trillingspatronen en bij het herleiden van formules.
12.8 de afgeleiden bepalen van de functies sinus, cosinus en tangens.
12.9 parametervoorstellingen gebruiken bij het bestuderen van figuren van Lissajous.

Domein Gb: Voortgezette meetkunde

Subdomein Gb1: Oriëntatie op bewijzen

13. De kandidaat kan definities, vermoedens, stellingen en bewijzen onderscheiden, meetkundige situaties exploreren, een vermoeden of te bewijzen stelling formuleren en bewijzen of weerleggen.

Specificatie

De kandidaat kan:

- 13.1 het verschil aangeven tussen een definitie en een stelling.
- 13.2 het verschil aangeven tussen een vermoeden en een stelling.
- 13.3 in relevante gevallen het verschil tussen een stelling en haar omkering herkennen en beoordelen welke van de twee bij een bepaald bewijs een rol kan spelen.
- 13.4 de structuur van een gegeven bewijs doorgronden.
- 13.5 verschillende technieken hanteren bij het geven van een bewijs of het weerleggen van een vermoeden, zoals:
 - het redeneren vanuit het ongerijmde,
 - het gebruik maken van meetkundige plaatsen,
 - het onderzoeken en onderscheiden van verschillende gevallen,
 - het geven van een tegenvoorbeeld.
- 13.6 meetkundige situaties exploreren en een vermoeden in de vorm van een (te bewijzen) stelling formuleren.

Subdomein Gb2: Constructie en bewijzen in de vlakke meetkunde

14. De kandidaat kan constructies uitvoeren en bewijzen geven.

Specificatie

De kandidaat kan:

- 14.1 bewijzen geven waarbij gebruik gemaakt wordt van eigenschappen van rechte lijnen, cirkels, driehoeken en vierhoeken en waarbij afstanden, hoeken en onderlinge ligging een rol spelen.
- 14.2 binnen een concrete probleemsituatie methoden uit de vlakke meetkunde gebruiken.
- 14.3 aangeven wat de afstand van een punt tot een gebied is en daarbij gebruik maken van cirkels rond het gegeven punt en/of de begrippen normaal en voetpunt.
- 14.4 middelloodlijnen, bissectrices, cirkels, parabolen als meetkundige plaatsen herkennen en gebruiken.
- 14.5 in eenvoudige gevallen de meetkundige plaats van punten vinden die gelijke afstand tot twee gegeven gebieden hebben.

3. Algebra: specifieke en algemene vaardigheden

In dit hoofdstuk worden de algebra-eisen beschreven die aan examenkandidaten vwo wiskunde B worden gesteld.

De eisen die aan de wiskunde B-kandidaten worden gesteld ten aanzien van algebra zijn divers. Zo moet een kandidaat in staat zijn algebra te gebruiken bij het modelleren en oplossen van een in een context gesteld probleem, maar hij zal ook in staat moeten zijn om een meer abstracte opgave op te lossen of een algebraïsch bewijs te leveren.

In algemene zin geldt dat de grafische rekenmachine (GR) vooral wordt gebruikt in die gevallen waarin een algebraïsche oplossing op het kennisniveau van de wiskunde B leerling niet goed mogelijk is. Een kandidaat moet dan ook kunnen beoordelen of een vraag kan worden beantwoord met een algebraïsche aanpak of dat de GR moet worden ingezet om een benaderende oplossing te vinden. In de vraagstelling van het examen kan worden aangeduid met een indicatie dat een exact antwoord wordt verwacht.

In het volgende wordt het algebraïsch handelen onderscheiden in twee soorten vaardigheden:

- specifieke vaardigheden (kennis en manipulatievaardigheden)
- algemene vaardigheden (strategieën hanteren die tot een oplossing leiden; een stappenplan ontwikkelen; het vertonen van inzicht in de structuur van een probleem).

Bij de opsplitsing in specifieke- en algemene vaardigheden is onderstaande lijst te maken. De lijst heeft niet de pretentie volledig dekkend te zijn, maar moet meer als een goede indicatie worden gezien. Vervolgens worden bij een aantal categorieën korte voorbeelden gegeven waaruit valt af te lezen welke vaardigheden een kandidaat moet kunnen tonen.

De algemene vaardigheden worden niet van korte voorbeelden voorzien, omdat het daarbij gaat om een samenhangend geheel van

- begrijpen wat er wordt gevraagd,
- een strategie (stappenplan) bepalen en die (dat) kunnen uitvoeren.

Voorbeelden van zulke koppelingen van algemene vaardigheden en specifieke vaardigheden worden wel gegeven in de serie opgaven op examenniveau. Een aantal van deze opgaven wordt via deelvragen naar een eindvraag geleid, maar er zijn ook enkele zogenaamde *enkelvoudige opgaven* opgenomen. Bij deze opgaven wordt van een kandidaat gevraagd het hele oplossingspad zelf te doorlopen. Het betreft de voorbeelden 4, 5, 6, 7 en 10.

Zulke opgaven (variërend in moeilijkheidsgraad) zullen zeker voorkomen in de examens.

Bij de onderstaande specifieke vaardighedenopsomming geldt zeker dat een deel (wellicht alleen in zijn grondvorm) bekend verondersteld moet worden vanuit de onderbouw. Denk bijvoorbeeld maar aan de voorrangsregels en het werken met haakjes, eenvoudige breukvormen en wortels.

Op de plaats van A , B en C kunnen lineaire combinaties staan van standaardfuncties, zoals $ax+b$,

$$\frac{a}{x} + b, 1 + 2 \cdot \sin x \text{ en } 2 - e^x.$$

De regels kunnen zowel van links naar rechts als van rechts naar links worden uitgevoerd. Verder geldt voor de specifieke vaardigheden dat een aantal van deze activiteiten niet geïsoleerd in een examen zal voorkomen, maar als een tussenstap in een uitwerkings- of oplossingsproces.

In bijlage 2 van deze syllabus worden op het gebied van de algebra de verschillen tussen de drie vakken – wiskunde A, B en C – in algemene zin belicht.

Specifieke vaardigheden	
A. Breukvormen	<ol style="list-style-type: none"> 1. $\frac{A}{B} + C = \frac{A+BC}{B}$³ 2. $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD}$ 3. $A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C} = \frac{A}{C} \cdot B = A \cdot B \cdot \frac{1}{C}$ 4. $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{B \cdot D}$ 5. $\frac{A}{B} = A \cdot \frac{C}{B} = \frac{A \cdot C}{B}$
B. Wortelvormen	<ol style="list-style-type: none"> 1. $\sqrt{A} = B \rightarrow A = B^2$ ($B \geq 0$) 2. $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ ($A, B \geq 0$) 3. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ ($A \geq 0, B > 0$)
C. Bijzondere producten	<ol style="list-style-type: none"> 1. $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$ 2. $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$
D. Exponenten en logaritmen	<ol style="list-style-type: none"> 1. regels voor machten kennen 2. regels voor logaritmen kennen
E. Goniometrie	voor formules: zie domein Db
F. 'Herleidingen' uitvoeren aan de hand van de elementen genoemd bij A - E	<ol style="list-style-type: none"> 1. via substitutie van getallen 2. via substitutie van expressies 3. via reductie van expressies 4. via het omwerken van formules
G. Vergelijkingen oplossen met behulp van algemene vormen	<ol style="list-style-type: none"> 1. $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ of $B = 0$ 2. $A \cdot B = A \cdot C \Leftrightarrow A = 0$ of $B = C$ 3. $\frac{A}{B} = C \Leftrightarrow A = B \cdot C$ en $B \neq 0$ 4. $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \cdot D = B \cdot C$ en $B, D \neq 0$ 5. $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = B$ of $A = -B$
H. Vergelijkingen oplossen met behulp van standaardfuncties en transformaties	<ol style="list-style-type: none"> 1. $f(bx + c) + d = e$ 2. $f(A) = f(B)$ 3. lijn- en puntsymmetrie kunnen hanteren: <ul style="list-style-type: none"> * $f(a + b) = f(a - b)$ bij lijnsymmetrie in $x = a$ * $f(a + b) = -f(a - b)$ bij puntsymmetrie in $(a, 0)$
I. Vergelijkingen met polynomen oplossen via standaardalgoritmen	<ol style="list-style-type: none"> 1. eerstegraadsvergelijkingen 2. tweedegraadsvergelijkingen 3. eerste- of tweedegraadsvergelijkingen met parameter(s)
K. Vergelijkingen van het type $f(x) = g(x)$	indien mogelijk exact
L. Ongelijkheden van het type $f(x) \geq g(x)$	indien mogelijk $f(x) = g(x)$ exact en verder grafisch

³ Dit is een specifieke vorm van breukvorm 2 en kan derhalve verwijderd worden.

Algemene vaardigheden	
M. Kwalitatief redeneren	<ol style="list-style-type: none"> 1. kwalitatief redeneren aan de hand van een gegeven expressie (zoals: getransformeerde standaardfuncties als zodanig herkennen en daarmee vanuit de kenmerkende karakteristieken redeneren i.p.v. rekenen) 2. gedrag van een expressie (functie) globaal (uitzoomen) en lokaal (inzoomen) kwalitatief beschrijven 3. het doorzien van de structuur van een formule
N. Substitutie en reductie	<ol style="list-style-type: none"> 1. expressies invullen voor variabelen en daarmee verder werken 2. complexe delen van een expressie vervangen door 'plaatsvervangers' zodat herkenbare expressies ontstaan
O. Algebraïsche stappen om expressies te bewerken kunnen benoemen en afwegen	<ol style="list-style-type: none"> 1. het vrijmaken van een variabele of expressie en daarmee verder werken 2. inverteren van formules en elimineren van variabelen en expressies 3. flexibel kunnen wisselen tussen betekenis toekennen aan symbolen en betekenisloos kunnen manipuleren

Een indicatieve opsomming van activiteiten die een kandidaat moet kunnen uitvoeren, gekoppeld aan de genoemde specifieke vaardigheden.

Algebraïsche activiteit
categorie A: breukvormen
1. $37,5 \cdot \frac{960}{x} + 180x = \frac{18000}{x} + 180x$
2. $\left(6,9 + \frac{298,5}{\frac{L}{T} \cdot 3600}\right) \cdot L = 6,9L + 0,083T$
3. $V = \frac{\text{opp} \cdot \text{tijd} \cdot \Delta \text{Temp}}{R} \rightarrow R = \dots$
4. $\frac{a}{b} \cdot M = \frac{c}{d} \rightarrow M = \dots$
5. $\frac{2q^2 - 8q + 16}{q} = 2q - 8 + \frac{16}{q}$
6. $\frac{3000}{t} \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right) \rightarrow \frac{3000t - 3000}{t^2}$
7. $\frac{60v}{k + \frac{v^2}{2a}} = \frac{120av}{2ak + v^2}$
8. $\frac{1300 - A}{A} = 44 \cdot 0,87^t \rightarrow A = \frac{1300}{1 + 44 \cdot 0,87^t}$
9. $\sqrt{1 - x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$
10. $\frac{3x+7}{(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3} \rightarrow a = \dots$ en $b = \dots$
11. $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$

Beschikbaar gesteld door de Universiteit Leiden en Stichting Studiebegeleiding Leiden (SSL).

Voor alle eindexamens, zie www.allexamens.nl. Voor de perfecte voorbereiding op je eindexamen, zie ook www.examencursus.com.

categorie B: wortelvormen
1. $\frac{4\frac{1}{2}}{\sqrt{t}} - 3 = 0 \rightarrow t = \dots$
2. $D = 6,9\sqrt{T - 12} \rightarrow T = \dots$
3. $\sqrt{1-x} + \frac{x}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$
4. $x + \sqrt{8+x} = 4 \rightarrow x = \dots$
categorie C: bijzondere producten
1. $(30 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 120x^2 + 900x$
2. $a \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - a \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{4a}{n}$
3. Toon aan: $\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 + 1 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$
4. $\sin^4 t - \cos^4 t = \sin^2 t - \cos^2 t$
categorie D: regels voor exponenten en logaritmen
1. $1000 \cdot (0,1)^{0,05x} = 1000 \cdot g^x$ met $g = \dots$
2. $11000 \cdot 0,9^t \cdot (0,7 - 0,5 \cdot 0,9^{2t}) = 7700 \cdot 0,9^t - 5500 \cdot 0,9^{3t}$
3. $g^4 = 1,82 \rightarrow g = 1,82^{0,25}$
4. $G = 10 \cdot \log l + 90 \rightarrow l =$
5. $\log G = 2 \cdot \log D + c \rightarrow G = 10^c \cdot D^2$
6. $0,007 \cdot (8G)^{0,425} \cdot (2L)^{0,725} = 4 \cdot 0,007 \cdot G^{0,425} \cdot L^{0,725}$
7. $P = 100 \cdot (1 - 2^{-c \cdot t})$ en $P = 50 \rightarrow t = \dots$
8. $\left. \begin{array}{l} S = \frac{1000}{R^3} \\ R = \sqrt{100+x^2} \end{array} \right\} \rightarrow S = 1000 \cdot (100+x^2)^{-1,5}$
9. $\sqrt[3]{1000x} \rightarrow 10x^{\frac{1}{3}}$
10. $2000t^{-2} - 40000t^{-3} = 0 \rightarrow t = \dots$
11. $\log y = a + b \cdot x \rightarrow y = 10^a \cdot (10^b)^x$
categorie F: Herleidingen en omwerken van formules
1. $\left. \begin{array}{l} a - b = 178 \\ a - 0,36b = 205 \end{array} \right\} \rightarrow a = \dots \text{ en } b = \dots$
2. $\left. \begin{array}{l} V = R^3 \\ O = 6R^2 \end{array} \right\} \text{ Druk } O \text{ uit in } V \text{ en druk } V \text{ uit in } O$
3. $250 = c \cdot 250 \left(1 - \frac{250}{d}\right) + 250$ en $c \neq 0 \rightarrow d = 250$
4. $\left. \begin{array}{l} L \cdot B = 30 \\ K = \frac{18547}{L} + 56,6L + \frac{5279}{B} + 90,8B \end{array} \right\} \text{ Druk } K \text{ uit in } L$

5. $V = 87 - \frac{20}{M+0,05} \rightarrow M = \dots$
6. $K = \frac{1}{10}A + 150$ en $A = \frac{1}{3}q^2 \rightarrow K = \frac{q^2}{30} + 150$
7. $\frac{7}{2}x - 5 = -4y + 40 \rightarrow y = -\frac{7}{8}x + \frac{45}{4}$
8. $H = \frac{6,7 \cdot l^{1,35}}{R} \rightarrow l = \dots$
9. $x\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} = (x+2)\sqrt{x+1}$
10. $\frac{y}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{x+1}{x} \rightarrow y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+9}$
11. $\sin^2 t = 1 + 2\cos t \rightarrow \cos t = \dots$
categorie G: vergelijkingen oplossen met behulp van algemene vormen
1. $-q^2 + 2bq = 0 \rightarrow q = \dots$ of $q = \dots$
2. $\frac{(4x-1)3-(3x+1)(2x-1)}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x = \dots$ of $x = \dots$
3. $(4x^2 - 8)^3 (2x+1) = 0 \rightarrow x = \dots$ of $x = \dots$ of $x = \dots$
4. Op $[0, 2\pi]$: $2x \sin x = x\sqrt{3} \rightarrow x = 0 \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$

Voorbeeldopgaven bij wiskunde B vwo

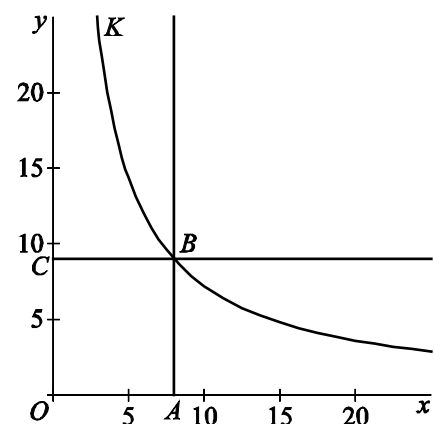
Opgave 1

Kromme K ligt in het eerste kwadrant van een rechthoekig assenstelsel Oxy . Punt B ligt op deze kromme en kan daarover bewegen. Steeds wordt de loodrechte projectie van B op de x -as A genoemd en de loodrechte projectie van B op de y -as C . De kromme K is zo gekozen dat voor elke positie van B op K de oppervlakte van rechthoek $OABC$ 72 is.

a. Toon aan dat K de grafiek van $y = \frac{72}{x}$ is.

De raaklijn in een punt B aan de kromme snijdt de x -as in punt D en de y -as in punt E .

b. Toon aan dat de oppervlakte van driehoek ODE niet afhangt van de positie van punt B op de kromme K .

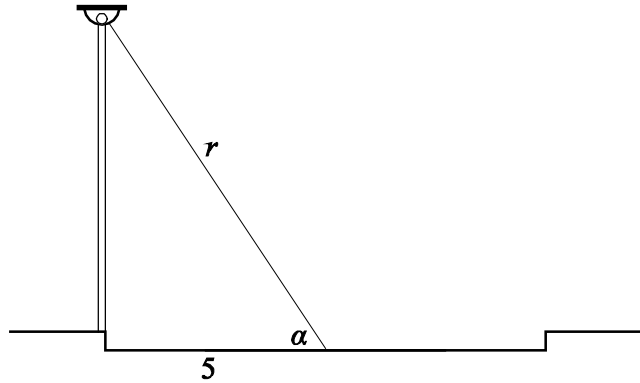


Opgave 2: Lantaarnpaal

Een straat wordt verlicht door straatlantaarns. De lichtintensiteit in een punt op de grond hangt af van de afstand tot de lamp en van de hoek die de lichtstralen maken met de grond:

$$L = c \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \sin \alpha .$$

Hierin is L de lichtintensiteit, r de afstand tot de lamp (in m) en α de hoek tussen de lichtstraal en de grond. In deze opgave wordt de constante c gelijk aan 1 gekozen, zodat de formule voor L wordt : $L = \frac{1}{r^2} \cdot \sin \alpha .$



De straat is ter hoogte van de lantaarn 10 meter breed. De vraag is hoe hoog de lamp boven de grond moet worden geplaatst, opdat de lichtintensiteit in het midden van de straat maximaal is.

- Druk voor het midden van de straat $\sin \alpha$ uit in r .
- Toon aan dat voor een punt in het midden van de straat geldt : $L^2 = \frac{1}{r^4} - \frac{25}{r^6} .$
- Bereken exact voor welke waarde van de hoogte de maximale waarde voor L wordt bereikt.

Opgave 3: Een rij van logaritmische functies

Voor $k = 2, 3, 4, \dots$ en voor $x > 0$ zijn gegeven de functies

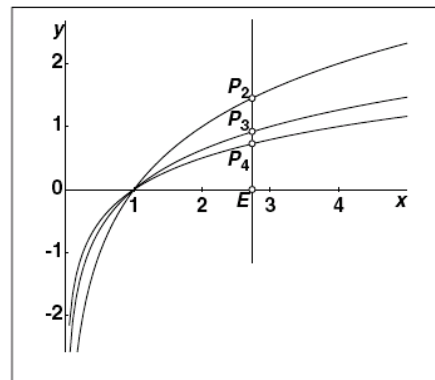
$$f_k(x) = {}^k \log x .$$

De lijn $x = e$ snijdt de x -as in het punt E en de grafiek van f_k in het punt P_k

In de figuur hiernaast zie je de grafieken van f_2, f_3 en f_4 en daarop de punten P_2, P_3 en P_4

In de punten P_2, P_3, P_4, \dots worden de raaklijnen aan de grafieken van f_2, f_3, f_4, \dots getekend.

- Toon aan dat al deze raaklijnen door het punt $(0,0)$ gaan.



Het midden van lijnstuk EP_k noemen we M_k

Zo ontstaat de rij van middens M_2, M_3, M_4, \dots

De figuur suggereert dat M_2 hetzelfde punt zou kunnen zijn als punt P_4

- Toon aan dat elk van de middens M_2, M_3, M_4, \dots op de grafiek van een functie f_k ligt.

Opgave 4:

Bekijk het gebied in het Oxy-vlak dat wordt begrensd door de x -as, de lijnen $x=a$ en $x=b$ (met $0 < a < b$) en de kromme met vergelijking $xy = 1$.

De lijn $x = m$ verdeelt dit gebied in twee delen met gelijke oppervlakte.

- > Toon aan dat geldt: $m = \sqrt{a \cdot b}$

Opgave 5:

De functie f is voor iedere reële $x \neq 0$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{x}{e^{x-1}}$

Bekijk de grafiek op de GR. Het lijkt erop dat deze grafiek symmetrisch is ten opzichte van de y -as.

- > Toon aan dat deze grafiek inderdaad symmetrisch is t.o.v. de y -as.

Opgave 6:

De functie f is voor iedere reële x gegeven door $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

Bekijk op de GR de grafiek van de functie $y = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) + 1$

> Wat voor bijzonders constateer je? Verklaar dit met behulp van algebra.

Opgave 7

Op de parabool $y = x^2$ liggen de punten $A(a, a^2)$ en $B(b, b^2)$ met $a > b$. Door de koorde AB en de parabool wordt een vlakdeel begrensd.

> Toon aan dat de oppervlakte van dit vlakdeel gelijk is aan $\frac{1}{6}(a - b)^3$

Opgave 8 Een periodieke beweging

Een punt beweegt in het Oxy-vlak volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos 2t \end{cases}$$

> Toon aan dat de beschreven baan een parabool is.

Opgave 9 (uit het examen VB1 2005 tijdvak 2, de vragen 9 en 11)

De totale reistijd T van een retourtocht met een boot over een rivier wordt gegeven door

$$T = \frac{10}{20+v} + \frac{10}{20-v}$$

Hierbij is T de tijd in uren en v de stroomsnelheid van de rivier in km/u, met $0 < v < 20$. Als de stroomsnelheid van de rivier groter wordt, neemt de totale reistijd van een retourtocht toe.

a. Toon dit algebraïsch aan.

Veronderstel dat v varieert tussen 0 en 10 km/u en dat alle waarden van 0 tot en met 10 even vaak voorkomen. Je kunt dan de gemiddelde reistijd met een integraal uitrekenen.

b. Toon langs algebraïsche weg aan dat de gemiddelde reistijd gelijk is aan ln 3 uur.

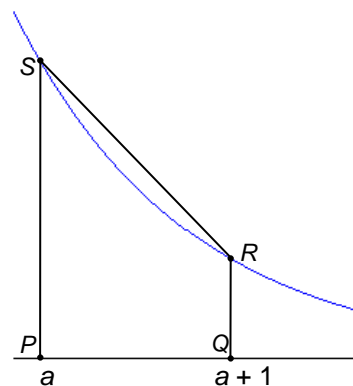
Opgave 10 (uit het examen VB1,2 2005 tijdvak 2, vraag 14)

Gegeven is de functie $f(x) = e^{-x}$.

De lijn $x = a$ snijdt de x -as in P en de grafiek van f in S , de lijn $x = a + 1$ snijdt de x -as in Q en de grafiek van f in R . Het gebied begrensd door de grafiek van f en de lijnstukken PS , PQ en QR noemen we V .

Het trapezium $PQRS$ noemen we W . Zie de figuur hiernaast.

> Toon aan dat de verhouding $\frac{\text{oppervlakte van } W}{\text{oppervlakte van } V}$ onafhankelijk is van a .



Bijlage 1: Examenprogramma Wiskunde B vwo

Het eindexamen

Het eindexamen bestaat uit het centraal examen en het schoolexamen.

Het examenprogramma bestaat uit de volgende domeinen:

Domein A Vaardigheden
Domein Bg Functies en grafieken
Domein Cg Discrete analyse
Domein Bb Differentiaal- en integraalrekening
Domein Db Goniometrische functies
Domein Gb Voortgezette meetkunde
Domein F Keuzeonderwerpen.

Het centraal examen

Het centraal examen heeft betrekking op de subdomeinen A5, Bg1, Bg2, Cg1, Bb1, Bb2, Bb3, Db1, Gb1 en Gb2, in combinatie met de vaardigheden uit de subdomeinen A1, A2 en A3.

De CEVO stelt het aantal en de tijdsduur van de zittingen van het centraal examen vast.

De CEVO maakt indien nodig een specificatie bekend van de examenstof van het centraal examen.

Het schoolexamen

Het schoolexamen heeft betrekking op domein A in combinatie met:

- de domeinen Bb, Db en Gb;
- het domein F, met dien verstande dat deze onderwerpen per kandidaat kunnen verschillen;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer van de overige domeinen of subdomeinen;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen, die per kandidaat kunnen verschillen.

De examenstof

Domein A: Vaardigheden

Subdomein A1: Informatievaardigheden

1. De kandidaat kan, mede met behulp van ICT, informatie verwerven, selecteren, verwerken, beoordelen en presenteren.

Subdomein A2: Onderzoeksvaardigheden

2. De kandidaat kan een gegeven probleemsituatie inventariseren, vertalen in een wiskundig model, binnen dat model wiskundige oplostechieken hanteren en de gevonden oplossingen betekenis geven in de context.

Subdomein A3: Technisch-instrumentele vaardigheden

3. De kandidaat kan bij raadplegen, verkennen en presenteren van wiskundige informatie en bij uitvoeren van wiskundige bewerkingen en redeneringen gebruik maken van toepassingen van ICT.

Subdomein A4: Oriëntatie op studie en beroep

4. De kandidaat kan een verband leggen tussen zijn wiskundige kennis, vaardigheden en belangstelling en de rol van wiskunde in vervolgstudies en de praktijk van verschillende beroepen.

Subdomein A5: Algebraïsche vaardigheden

5. De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige en algebraïsche vaardigheden en formules, heeft daar inzicht in en kan de bewerkingen uitvoeren met, maar ook zonder, gebruik van ICT-middelen zoals de grafische rekenmachine.

Domein Bg: Functies en grafieken

Beschikbaar gesteld door de Universiteit Leiden en Stichting Studiebegeleiding Leiden (SSL).

Voor alle eindexamens, zie www.allexamens.nl. Voor de perfecte voorbereiding op je eindexamen, zie ook www.examencursus.com.

Subdomein Bg1: Standaardfuncties

6. De kandidaat kan grafieken tekenen en herkennen van machtsfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies en van die verschillende typen functies de karakteristieke eigenschappen benoemen.

Subdomein Bg2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden

7. De kandidaat kan functievoorschriften opstellen, bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen en vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met behulp van numerieke, grafische en algebraïsche methoden.

Domein Cg: Discrete analyse

Subdomein Cg1: Veranderingen

8. De kandidaat kan het veranderingsgedrag van grafieken en functies relateren aan differentiequotiënten, toenamendiagrammen, hellinggrafieken en contexten.

Domein Bb: Differentiaal- en integraalrekening

Subdomein Bb1: Afgeleide functies

9. De kandidaat kan het differentiaalquotiënt en de eerste en tweede afgeleide gebruiken om een functie te onderzoeken en om een contextprobleem op te lossen.

Subdomein Bb2: Algebraïsche technieken

10. De kandidaat kan afgeleide functies bepalen met behulp van regels voor het differentiëren en algebraïsche technieken hanteren.

Subdomein Bb3: Integraalrekening

11. De kandidaat kan in geschikte toepassingen een bepaalde integraal opstellen en exact berekenen, en met behulp van ICT benaderen.

Domein Db: Goniometrische functies

Subdomein Db1: Goniometrische functies

12. De kandidaat kan bij periodieke verschijnselen, met name trillingspatronen en harmonische bewegingen, formules opstellen, herleiden en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen en vergelijkingen oplossen.

Domein Gb: Voortgezette meetkunde

Subdomein Gb1: Oriëntatie op bewijzen

13. De kandidaat kan definities, vermoedens, stellingen en bewijzen onderscheiden, meetkundige situaties exploreren, een vermoeden of te bewijzen stelling formuleren en bewijzen of weerleggen.

Subdomein Gb2: Constructie en bewijzen in de vlakke meetkunde

14. De kandidaat kan constructies uitvoeren en bewijzen geven.

Domein F: Keuzeonderwerpen

Bijlage 2: Algebra in het vwo; het onderscheid tussen A, B en C

In deze bijlage worden op het gebied van de algebra de verschillen tussen de drie vakken – wiskunde A, B en C – in algemene zin belicht. De nadere specificaties voor elk van de drie vakken zijn te vinden in hoofdstuk 3 van deze syllabus.

Algebra: specifieke en algemene vaardigheden

Binnen de commissies A, B en C is gesproken over algebra aan de hand van een opsomming in termen van kennis, vaardigheden en inzicht.

In een later stadium is dit gewijzigd in de termen *specifieke vaardigheden* en *algemene vaardigheden*. In het volgende wordt gepoogd deze twee begrippen te verduidelijken en ook aan te geven op welke manier deze twee soorten vaardigheden een plaats krijgen binnen de drie vakken.

De volgende metafoor kan dienen om de verschillen tussen de A-, B- en C-leerlingen te typeren ten aanzien van het beheersingsniveau van vaardigheden.

In de schaakwereld heb je in de eerste plaats de professionele spelers. Zij worden geacht de tactiek en techniek van het schaakspel volledig te beheersen. Zij trainen op kennis (wat zijn de spelregels?; welke openingen zijn er?), vaardigheden (hoe speel je een bepaald eindspel uit?) en metacognitieve vaardigheden (welke openingen beheers ik goed en welke niet?; waar liggen mijn sterke punten?). Daarnaast ontwikkelen ze strategisch inzicht (wat is een veelbelovende situatie?). Hierbij speelt organisatie van je kennis en vaardigheden een rol.

Naast deze spelers zijn er scheidsrechters (of de sportverslaggevers). Zij kennen de spelregels. Zij hebben, door ervaring, ook enige kennis en vaardigheden m.b.t. het spel. Zij begrijpen het spel, kunnen met de spelers een aantal stappen volgen, de wedstrijden analyseren, kunnen de denkstappen van de spelers waarderen en kunnen een beperkt aantal stappen vooruit denken in een gegeven situatie. Deze scheidsrechters (of verslaggevers) hebben niet de kennis en vaardigheden om, zoals de spelers, zelf een partij op niveau te spelen.

Dan zijn er de geïnteresseerde toeschouwers. Ze moeten de spelregels kennen en begrijpen maar hebben niet de kennis en vaardigheid om zelf op dat niveau te spelen. Dat hoeft ook niet. Wel hebben zij waardering voor het spel en kunnen zij onderscheiden of er een goede prestatie geleverd wordt of niet en zijn ze in staat om een veelbelovende volgende zet te herkennen.

In het vwo zijn er m.b.t. algebra ook drie groepen.

De spelers zijn de wiskunde B groepen die het wiskundespel moeten beheersen, zowel voor wat betreft de kennis en vaardigheden (incl. de metacognitieve) als voor wat betreft de organisatie hiervan. De kennis en vaardigheden noemen we de **specifieke algebraïsche vaardigheden**.

De organisatie van kennis en vaardigheden heeft te maken met het inzicht om op de juiste momenten de gewenste specifieke algebraïsche vaardigheden in te zetten. Dit heeft te maken met *strategisch inzicht*. Wat is een veelbelovende volgende zet? Hoe kan ik de dan ontstane situatie beoordelen op zijn bruikbaarheid? Dit noemen we de **algemene algebraïsche vaardigheden**

De wiskunde A groep wordt gevormd door de scheidsrechters/sportverslaggevers. Zij beschikken niet over het strategisch inzicht van de spelers, maar kunnen de spelers wel volgen als deze hun strategisch gedrag uitleggen. Ook kunnen zij wel controleren of een zet toegestaan is. In meer eenvoudige situaties kunnen zij enkele tussenstappen bedenken om een bepaald geformuleerd einddoel te behalen.

De wiskunde C groep vormt de toeschouwers. Zij kijken naar echte wedstrijden. Zij hebben waardering voor het spel en kennen en begrijpen de spelregels, maar bezitten niet de techniek en tactiek om ver vooruit te denken. Ze kunnen wel kritisch bezien of een zet veelbelovend is of niet.

Drie voorbeelden die zijn bedoeld om het bovenstaande te illustreren:

Vb 1: Zoek waarden voor x en y die voldoen aan de volgende eisen:

$$x \cdot y = 10 \text{ en } x + 2y = 9$$

Een wi B leerling moet hier zijn eigen strategie kunnen bepalen en uitvoeren om tot de oplossing te komen.

Een wi A leerling moet met de hint 'kun je hieruit een vergelijking vinden met maar één onbekende?' tot de oplossing kunnen komen.

Een wi C leerling moet kunnen controleren dat $x = 4$ met $y = 2,5$ en $x = 5$ met $y = 2$ de oplossingen zijn en kan een uitleg volgen om tot die oplossing te komen.

Vb 2: Gegeven is de formule $G = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) + 130$. Hoe verandert de waarde van G als I twee keer zo groot wordt? Bewijs je uitspraak.

Een wi B leerling moet hiermee uit de voeten kunnen.

Ook een wi A leerling zou dit moeten kunnen, eventueel met tussenvragen: Toon aan dat de formule ook te schrijven is als $G = 10 \cdot \log(I) - 10 \cdot \log(I_0) + 130$, of Toon aan dat G altijd ongeveer 3 groter wordt als I verdubbelt.

Een wi C leerling zal op het spoor gezet moeten worden om $2I$ in de formule in te vullen in plaats van I . Dit kan door naar getallenvoorbeelden te vragen en daarna expliciet te vragen naar een generalisatie.

Vb 3: Voor de verdubbelingstijd bij exponentiële processen wordt vaak als vuistregel gebruikt:

$$T = \frac{70}{p}, \text{ waarbij } p \text{ het groeipercentage per jaar is en } T \text{ de verdubbelingstijd in jaren.}$$

Onderzoek voor welke waarden van p deze benadering minder dan 1 jaar afwijkt van de werkelijke waarde van de verdubbelingstijd.

Een wi B leerling moet hiermee zelfstandig uit de voeten kunnen.

Voor een wi A leerling zijn er tussenstappen nodig. Bijvoorbeeld: de werkelijke T kan berekend worden met de formule $T = \frac{\log 2}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$; stel nu een verschilfunctie op tussen de T uit de vuistregel en de werkelijke T .

Een wi C leerling zou eerst gevraagd kunnen worden een tabel te maken met daarin voor gehele waarden van p de werkelijke verdubbelingstijd en die van de vuistregel. Naar aanleiding van deze tabel kunnen dan conclusies getrokken worden.

Bij dit laatste voorbeeld wordt overgeschakeld op een andere representatie van een functie, namelijk de tabel. Dit gebeurt in de onderbouw van het vwo veel en is een nadrukkelijk leerdoel daar. De strategie 'welke representatie van een functie kies ik?' zal zeker bij wiskunde C, maar ook bij wiskunde A een rol moeten spelen. Bij wiskunde B lijkt voornamelijk het herschrijven van analytische representaties van belang.

Het kiezen van een handige representatie is slechts één van de problemen die zich voordoen bij het manipuleren van formules. Andere problemen, waar je weer de *algemene algebraïsche vaardigheden* ten dele in terugziet:

- schakelen tussen verschillende representaties (grafiek, formule, tabel, verbaal)
- schakelen tussen (reken)procedure en object (wat is $\sqrt{2}$, ${}^2\log 5$, $x^2 + 5x$)
- schakelen tussen betekenis geven aan symbolen en betekenisloos manipuleren volgens algebraïsche regels
- schakelen tussen lokaal en globaal, zowel in een formule als in een aantal stappen van een berekening

Samenvattend

Bij de drie vakken wiskunde A, B en C spelen zowel specifieke- als algemene vaardigheden op het gebied van algebra een rol.

De *specifieke vaardigheden* omvatten kenniselementen (zoals regels voor breuken, machten, logaritmen en wortels) en manipulatievaardigheden (zoals het kunnen omwerken van expressies en het oplossen van vergelijkingen).

De mate waarin en het niveau waarop deze specifieke vaardigheden worden beheerst verschillen voor A, B en C.

De *algemene vaardigheden* worden in drie groepen gedeeld:

- kwalitatief redeneren
- substitutie en reductie
- algebraïsche stappen om expressies te bewerken kunnen benoemen en afwegen

Bij wiskunde B komen de drie groepen aan bod.

Voor wiskunde A vervalt de laatste groep, terwijl bij wiskunde C alleen het kwalitatief redeneren wordt genoemd (structuur van een formule doorzien, gedrag van een expressie globaal en lokaal kwalitatief beschrijven)

Algebra en de Grafische Rekenmachine (GR)

Zoals in de verschillende syllabi wordt aangeduid voor het betreffende vak, kan er ook nog op een wat andere manier tegen de algebraïsche vaardigheden worden aangekeken. Een onderscheid tussen wiskunde B enerzijds en wiskunde A en C anderzijds komt ook tot uitdrukking in het type opgaven in een examen.

Bij wiskunde A en C is het wiskundegereedschap bedoeld om contextproblemen mee te analyseren en op te lossen. Omdat in toepassingen veelal met benaderende waarden (van grootheden) wordt gewerkt, ligt het niet voor de hand om exacte antwoorden te eisen. In veel gevallen zal de GR daarbij zinvol kunnen worden ingezet.

Bij wiskunde B daarentegen zullen zeker ook meer abstracte vraagstukken voorkomen die met behulp van algebra moeten worden geanalyseerd of waarvoor een algebraïsch bewijs moet worden geleverd. Daarbij speelt de GR geen rol.

Bijlage 3: Lijst van formules en verwijzingen naar definities/stellingen die in het examen wordt opgenomen

De volgende lijst formules en verwijzingen naar definities/stellingen wordt afgedrukt op bladzijde 2 van het examen. Een toelichting bij deze lijst is opgenomen in bijlage 4.

Vlakke meetkunde

Verwijzingen naar definities en stellingen die bij een bewijs mogen worden gebruikt zonder nadere toelichting.

Hoeken, lijnen en afstanden:

gestrekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, afstand punt tot lijn, driehoeksongelijkheid.

Meetkundige plaatsen:

middelloodlijn, bissectrice, bissectricepaar, middenparallel, cirkel, parabool.

Driehoeken:

hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zzz; middelloodlijnen driehoek, bissectrices driehoek, hoogtelijn driehoek, hoogtelijnen driehoek, zwaartelijn driehoek, zwaartelijnen driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, Pythagoras, gelijkbenige rechthoekige driehoek, halve gelijkzijdige driehoek.

Vierhoeken:

hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.

Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken:

koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, raaklijn, hoek tussen koorde en raaklijn, koordenvierhoek.

Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$

$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$

$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$

$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin t + \sin u = 2 \sin \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$$

$$\sin t - \sin u = 2 \sin \frac{t-u}{2} \cos \frac{t+u}{2}$$

$$\cos t + \cos u = 2 \cos \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$$

$$\cos t - \cos u = -2 \sin \frac{t+u}{2} \sin \frac{t-u}{2}$$

Bijlage 4: Lijst van definities/stellingen behorend bij de verwijzingen in bijlage 3

De opsomming van verwijzingen zoals die in het examen is vermeld op bladzijde 2 voor de vlakke meetkunde, heeft betrekking op de volgende lijst van definities en stellingen. Deze lijst mag bij het examen niet gebruikt worden.

Bij het examen mag bij een bewijsvoering verwezen worden naar een definitie of stelling door het noemen van de korte typering die in de volgende lijst cursief en onderstreept is aangegeven bij elk van de gegeven definities en stellingen.

Hoeken, lijnen en afstanden

<p>Hoeken</p> <p>Een gestrekte hoek is een hoek waarvan de benen in het verlengde van elkaar liggen. (definitie <u><i>gestrekte hoek</i></u>)</p> <p>De grootte van een gestrekte hoek is 180°. (grootte <u><i>gestrekte hoek</i></u>)</p> <p>Een rechte hoek is de helft van een gestrekte hoek. (definitie <u><i>rechte hoek</i></u>)</p> <p>De grootte van een rechte hoek is 90°. (grootte <u><i>rechte hoek</i></u>)</p>
<p>Hoeken en lijnen</p> <p>De overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen zijn even groot. (stelling <u><i>overstaande hoeken</i></u>)</p> <p>Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn F-hoeken even groot en Z-hoeken even groot. (stelling <u><i>F-hoeken</i></u> ,stelling <u><i>Z-hoeken</i></u>)</p> <p>Als er bij twee lijnen die gesneden worden door een derde lijn een paar even grote F-hoeken of Z-hoeken optreedt, dan zijn die twee lijnen evenwijdig. (stelling <u><i>F-hoeken</i></u> ,stelling <u><i>Z-hoeken</i></u>)</p>
<p>Afstanden</p> <p>De afstand (kortste verbinding) van een punt tot een lijn is de lengte van het loodlijnstuk neergelaten vanuit dat punt op die lijn. (definitie <u><i>afstand punt tot lijn</i></u>)</p> <p>Als drie punten A, B en C niet op één lijn liggen, dan geldt: $AB + BC > AC$. (stelling <u><i>driehoeksongelijkheid</i></u>)</p>

Meetkundige plaatsen

<p>Middelloodlijn</p> <p>De middelloodlijn van een lijnstuk is de lijn die het lijnstuk loodrecht middendoor snijdt. (definitie <u><i>middelloodlijn</i></u>)</p> <p>De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee gegeven punten A en B is de middelloodlijn van het lijnstuk AB. (stelling <u><i>middelloodlijn</i></u>)</p>
<p>Bissectrice (deellijn)</p> <p>De bissectrice (deellijn) van een hoek is de halve lijn die de hoek middendoor deelt. (definitie <u><i>bissectrice</i></u>)</p>

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee elkaar snijdende lijnen, is het bissectricepaar (deellijnenpaar) van die twee lijnen. (stelling bissectricepaar)

Middenparallel van twee evenwijdige lijnen

De middenparallel van twee evenwijdige lijnen is de lijn die evenwijdig aan de twee lijnen is en midden tussen deze lijnen ligt. (definitie middenparallel)

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee evenwijdige lijnen, is de middenparallel van dat lijnenpaar. (stelling middenparallel)

Cirkel

Een cirkel met middelpunt M en straal r is de verzameling van alle punten die afstand r tot het punt M hebben. (definitie cirke!)

Parabool

Een parabool met brandpunt F en richtlijn l (F niet op l) is de verzameling van alle punten die gelijke afstanden hebben tot punt F en lijn l . (definitie parabool)

Driehoeken

Hoekensom

De som van de hoeken van een driehoek is 180° . (stelling hoekensom driehoek)

Een buitenhoek van een driehoek is gelijk aan de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken. (stelling buitenhoek driehoek)

Congruente (gelijke) driehoeken

Twee driehoeken zijn congruent (gelijk) als ze gelijk hebben:

- een zijde en twee aanliggende hoeken. (HZH)
- een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek. (ZHH)
- twee zijden en de ingesloten hoek. (ZHZ)
- alle zijden. (ZZZ)
- twee zijden en de rechte hoek tegenover één van die zijden. (ZZR)

Gelijkvormige driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben:

- twee hoeken. (hh)
- een hoek en de verhouding van de omliggende zijden. (zhz)
- de verhouding van de zijden. (zzz)
- een rechte hoek en de verhouding van twee niet-omliggende zijden. (zzr)

Lijnen door één punt

De middelloodlijnen van (de zijden van) een driehoek snijden elkaar in één punt. (stelling middelloodlijnen driehoek)

De bissectrices (deellijnen) van (de hoeken van) een driehoek snijden elkaar in één punt. (stelling bissectrices driehoek)

Een hoogtelijn van een driehoek is de lijn door een hoekpunt van de driehoek die de lijn door de tegenoverliggende zijde loodrecht snijdt. (definitie hoogtelijn driehoek)

De hoogtelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt. (stelling hoogtelijnen driehoek)

Een zwaartelij van een driehoek is de lijn door een hoekpunt van de driehoek die door het midden van de tegenoverliggende zijde gaat. (definitie zwaartelij driehoek)

De zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt dat de zwaartelijnen in de verhouding 1 : 2 verdeelt. (stelling zwaartelijnen driehoek)

Gelijkbenige driehoek

Een gelijkbenige driehoek is een driehoek met (minstens) twee even lange zijden. (definitie gelijkbenige driehoek)

In een gelijkbenige driehoek zijn de hoeken tegenover de even lange zijden even groot. (stelling gelijkbenige driehoek)

Als in een driehoek twee hoeken even groot zijn, dan zijn de tegenoverliggende zijden even lang. (stelling gelijkbenige driehoek)

Gelijkzijdige driehoek

Een gelijkzijdige driehoek is een driehoek met drie even lange zijden. (definitie gelijkzijdige driehoek)

In een gelijkzijdige driehoek zijn alle drie de hoeken even groot (60°). (stelling gelijkzijdige driehoek)

Als een driehoek drie even grote hoeken (van 60°) heeft, dan is de driehoek gelijkzijdig. (stelling gelijkzijdige driehoek)

Rechthoekige driehoek

Een rechthoekige driehoek is een driehoek met een rechte hoek. (definitie rechthoekige driehoek)

In een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten van de omliggende zijden van de rechte hoek gelijk aan het kwadraat van de zijde tegenover de rechte hoek. (stelling van Pythagoras)

Als in een driehoek de som van de kwadraten van twee zijden gelijk is aan het kwadraat van de derde zijde, dan is de driehoek rechthoekig (omgekeerde stelling van Pythagoras)

In een rechthoekige driehoek is het lijnstuk dat het hoekpunt van de rechte hoek verbindt met het midden van de tegenoverliggende zijde gelijk aan de helft van die zijde. (stelling rechthoekige driehoek)

Bijzondere rechthoekige driehoeken

Van een gelijkbenige rechthoekige driehoek zijn beide scherpe hoeken 45° . (stelling gelijkbenige rechthoekige driehoek)

De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als 1 : 1 : $\sqrt{2}$. (stelling gelijkbenige rechthoekige driehoek)

De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, verhouden zich als 1 : 2 : $\sqrt{3}$. (stelling halve gelijkzijdige driehoek)

Vierhoeken

Hoekensom

De som van de hoeken van een vierhoek is 360° . (stelling hoekensom vierhoek)

Parallelogram

Een parallelogram is een vierhoek met twee paren evenwijdige zijden. (definitie parallelogram)

In een parallellogram zijn de overstaande zijden even lang. (stelling parallellogram)

Als een vierhoek twee paren even lange overstaande zijden heeft, dan is de vierhoek een parallellogram. (stelling parallellogram)

Als een vierhoek twee overstaande zijden heeft die even lang en evenwijdig zijn, dan is de vierhoek een parallellogram. (stelling parallellogram)

In een parallellogram zijn de overstaande hoeken even groot. (stelling parallellogram)

Als in een vierhoek de twee paren overstaande hoeken even groot zijn, dan is de vierhoek een parallellogram. (stelling parallellogram)

In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor. (stelling parallellogram)

Als in een vierhoek de diagonalen elkaar middendoor delen, dan is de vierhoek een parallellogram. (stelling parallellogram)

Ruit

Een ruit is een vierhoek met vier even lange zijden. (definitie ruit)

Een ruit is tevens parallellogram. (stelling ruit)

In een ruit delen de diagonalen de hoeken middendoor. (stelling ruit)

Als in een parallellogram een diagonaal een hoek middendoor deelt, dan is het parallellogram een ruit. (stelling ruit)

In een ruit snijden de diagonalen elkaar loodrecht. (stelling ruit)

Als in een parallellogram de diagonalen elkaar loodrecht snijden, dan is het parallellogram een ruit. (stelling ruit)

Rechthoek

Een rechthoek is een vierhoek met vier rechte hoeken. (definitie rechthoek)

Een rechthoek is tevens parallellogram. (stelling rechthoek)

Als in een parallellogram een hoek recht is, dan is het parallellogram een rechthoek. (stelling rechthoek)

In een rechthoek zijn de diagonalen even lang. (stelling rechthoek)

Als in een parallellogram de diagonalen even lang zijn, dan is het parallellogram een rechthoek. (stelling rechthoek)

Vierkant

Een vierkant is een ruit die tevens rechthoek is. (definitie vierkant)

Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken

Koorde

Een koorde van een cirkel is een lijnstuk waarvan de eindpunten op de cirkel liggen. (definitie koorde)

In een cirkel behoren gelijke bogen bij gelijke koorden. (stelling boog en koorde)

De loodlijn vanuit het middelpunt van een cirkel op een koorde deelt die koorde middendoor. (stelling loodlijn op koorde)

De lijn door het middelpunt van een cirkel die een koorde die niet door het middelpunt gaat middendoor deelt, staat loodrecht op die koorde. (stelling loodlijn op koorde)

Middellijn en rechte hoek

Een middellijn van een cirkel is een koorde die door het middelpunt gaat. (definitie middellijn)

Als C op de cirkel met middellijn AB ligt, dan is hoek ACB recht. (stelling van Thales)

Als hoek C in driehoek ABC recht is, dan ligt C op de cirkel met middellijn AB . (omgekeerde stelling van Thales)

Middelpuntshoek en omtrekshoek

Een middelpuntshoek van een cirkel is een hoek waarvan het hoekpunt het middelpunt van de cirkel is. (definitie middelpuntshoek)

Een omtrekshoek van een cirkel is een hoek waarvan het hoekpunt op de cirkel ligt en de benen de cirkel snijden. (definitie omtrekshoek)

Een omtrekshoek is gelijk aan de helft van de middelpuntshoek die dezelfde koorde insluit als die omtrekshoek. (stelling van de omtrekshoek)

Als punt C over een cirkelboog AB tussen de punten A en B beweegt, dan verandert de grootte van de omtrekshoek ACB niet. (stelling van de constante hoek)

Als punt D aan dezelfde kant van AB ligt als punt C en de hoeken ADB en ACB zijn even groot, dan liggen C en D op dezelfde cirkelboog AB (omgekeerde stelling van de constante hoek)

Raaklijn en hoeken

Een raaklijn aan een cirkel is een lijn die één punt met de cirkel gemeen heeft. (definitie raaklijn)

De hoek tussen een raaklijn aan een cirkel en een koorde van die cirkel waarvan een eindpunt het raakpunt is, is even groot als de bij die koorde behorende omtrekshoek. (stelling hoek tussen koorde en raaklijn)

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindinglijn van het middelpunt van de cirkel en het raakpunt. (stelling raaklijn)

De lijn door een punt van een cirkel die loodrecht staat op de verbindinglijn van het middelpunt van de cirkel en dit punt is een raaklijn aan de cirkel. (stelling raaklijn)

Koordenvierhoek

Een koordenvierhoek is een vierhoek waarbij een cirkel bestaat die door de hoekpunten van de vierhoek gaat. (definitie koordenvierhoek)

De som van een paar overstaande hoeken van een koordenvierhoek is 180° . (stelling koordenvierhoek)

Als de som van een paar overstaande hoeken van een vierhoek 180° is, dan is de vierhoek een koordenvierhoek. (omgekeerde stelling koordenvierhoek)